

宇宙の大規模構造におけるマルチフラクタル構造の進化

立川崇之*

Evolution of Multifractal Structure in the Large-scale Structure in the Universe
Takayuki TATEKAWA*

(Received September 20, 2014)

We have analyzed the evolution of multifractal structure in the Universe. The galaxies construct large-scale structure in the Universe. According to recent observations, the large-scale structure have multifractal structure during several $h^{-1}\text{Mpc}$. We have applied multifractal analysis for cosmological N -body simulations based on LCDM model. We have analyzed the evolution of the multifractal dimensions. Then we have shown the dependence on setting up the initial condition based on higher-order Lagrangian perturbations for cosmological N -body simulations.

Key words : Cosmology, Gravity, Large-scale structure, Simulation, Multifractal

1. 緒言

夜空には星や銀河などの天体が輝いている。天球上の星の位置が互いに近いものを結びあわせて星座が考えられ、現在では国際天文学連合により 88 の星座が公認されている。星座は地表からみた天球上の分布が近いものを結んだものであるため、地球からの各々の星までの距離はバラバラである。それでは天体は宇宙にどのように分布しているのだろうか。

天体の分布については、より根源的な問題が考えられている。その一つとして、「夜空が何故暗いのか」という問題として、Olbers により 1823 年に以下の様なパラドックスが考えられた*。もし宇宙が無限に広く、その中で天体が一様に分布しているならば、各々の天体から発せられた光は地球でどの程度の明るさになるだろうか。1つの天体から単位時間辺りに放出される可視光の全強度を L とすると、天体から距離 r だけ離れたところで単位面積辺りに受ける可視光の強度は $L/(4\pi r^2)$ となる。天体の数密度が場所によらず一定で n_s とすると、地球上で単位面積辺りに受ける天体からの可視光

の強度は以下の様になる。

$$\begin{aligned} \int \frac{n_s L}{4\pi r^2} d^3\mathbf{r} &= \int_0^\infty 4\pi r^2 \cdot \frac{n_s L}{4\pi r^2} dr \\ &= \int_0^\infty n_s L dr \\ &= \infty. \end{aligned} \quad (1)$$

地球上で受ける可視光の強度は無限大、すなわち夜空は無限に明るい事になる。ところが実際の夜空は暗いということで、矛盾が生じる。これが Olbers のパラドックスと呼ばれる問題である。

Olbers のパラドックスに対して、観測と矛盾しない様々なモデルが提案された。現在の宇宙論における標準モデルでは、宇宙は有限時間の過去に始まっている。光速は有限であるため、式 (1) の積分の上限が有限になり、地球に届く天体からの可視光の強度も有限になる。また、天体が形成されるのは宇宙が誕生してから数億年後であり、過去、つまり遠方の天体は現在よりも数が少なく、天体の数密度も一定でないと考える。このため、現代宇宙論では Olbers のパラドックスは解決している。

一方で、宇宙論の標準モデルと異なるモデルとして、「宇宙での天体の分布は一様ではない」というモデルが提案された。例えば 1848 年に Harshell は、恒星が現在でいうところのフラクタル構造^[1]を持てば、可視光の強度が有限になる可能性を示唆している。Charlier^[2]は連続的にフラクタルの階層構造が存在するために、パ

*総合情報基盤センター

*Center for Information Initiative

*Olbers 以前にも 1576 年に Thomas Digges, 1610 年に Kepler により同様の問題が指摘されているが、Olbers のパラドックスとして広く知られている

ラドックスが解消されるのではないかという事を示唆した。

近年になり、銀河の3次元分布が観測から得られる様になっている^{[3]-[7]}。この観測結果に対し、空間二点相関関数を求めたところ、非常に大きなスケールでは相関がほとんどなく一様分布とみなせるが、ある長さスケールでは空間二点相関関数が距離の冪に従う事が明らかになった。特定の長さスケールでは、分布は特徴的な大きさを持たないという事を意味する。このことから、宇宙にはフラクタル構造が存在するのではないかという事が改めて考えられる様になった。

本論文では、まずマルチフラクタルの解析方法を述べる。次に銀河の分布に対する空間二点相関関数、マルチフラクタル解析の結果を述べる。そして、宇宙論的 N 体シミュレーションにより、マルチフラクタル構造がどのように進化して行くかを解析する。ここでは宇宙論的 N 体シミュレーションの初期値問題も併せて取り上げ、初期条件の設定の違いにより、その後の進化がどのように変わるかも調べる。

2. マルチフラクタル解析

自然界には、特徴的な長さを持たない構造を示す対象が存在する。例えば積乱雲は雲の一部を拡大してみた場合、拡大する倍率を変えても類似した構造が現れる。このような特徴的な長さを持たない図形や構造、現象などを総称して、フラクタルという^{[1], [8]}。ラテン語の "fractus" という、物が壊れて不規則な破片になった状態を表す形容詞を語源としている。フラクタル構造を解析する際には、フラクタル次元と呼ばれる次元が重要になる。数学的には、構造の一部分をいくつ集めれば、より大きな構造を構成出来るかで次元を定義する。例えば正方形の場合、元の正方形の2倍の大きさの正方形を構成するには4つ集める必要がある。立方体の場合には、大きさを2倍にするには8個必要となる。構造のスケールと集めた部分構造の数の指数関係から、正方形、立方体の次元はそれぞれ2, 3となる。ところが、フラクタル構造を持つ例として、von Koch 曲線がある。von Koch 曲線は線分を無限回折り曲げて作る図形であるが、スケールを3倍にする von Koch 曲線を構成するには、元の von Koch 曲線を3つではなく4つ集める必要がある。この時、von Koch 曲線の「フラクタル次元」は

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \simeq 1.26, \quad (2)$$

となり、非整数の次元が現れる。

マルチフラクタル解析は、前述のフラクタル構造の解析をさらに発展させたものである。フラクタル構造を厳密に解析する数学的手法は、前述の様に「大きな構造を形成するには、元の構造をいくつ集める必要があるか」というようなものの他にいくつか存在するが^[8]、ここでは自然現象に対して容易に行える解析手法を考える。

N 個の粒子分布を解析の対象とする。まず N 個の粒子が含まれる一辺の長さ L の立方体を考える。次に立方体を一辺の長さ l の小さな立方体で分割し、番号を付ける。 i 番目の立方体に粒子が n_i 個含まれているとすると、

$$n_i(l) = n, \quad (3)$$

とする。次に以下の式で表される q 次モーメントを計算する。

$$\chi_l(q) = \sum_{i=1}^{(L/l)^3} \left(\frac{n_i}{N} \right)^q. \quad (4)$$

そして $\log(l)$ と $\log(\chi_l(q))$ の関係を見てみる。以下の式が収束した場合には、マルチフラクタル構造が存在するとみなす。

$$D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1}{q-1} \frac{\log \chi_l(q)}{\log l} \quad (q \neq 1). \quad (5)$$

$q = 1$ の場合には上記の定義式で $q \rightarrow 1$ の極限を取る。

$$D_1 = \lim_{q \rightarrow 1} D_q = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\sum_i (n_i/N) \log(n_i/N)}{\log l}. \quad (6)$$

現実的には立方体の一辺の長さを無限小に出来ないの、ある長さスケールで l を変化させても、右辺の値がほぼ一定ならば、構造はマルチフラクタル構造を持つと考えられる。

D_q を一般化された次元、あるいはマルチフラクタル次元という。もし我々が q として大きな値を選ぶと、密度コントラストの大きい領域が強調される。 $q = 0$ の場合には立方体の中に粒子が含まれるかどうかのみを判定し、マルチフラクタル次元 $q = 0$ を計算する事になる。 D_0 をモノフラクタル次元、 D_1 を情報次元ともいう。

3. 銀河分布の観測に対する解析

Gamow により 1948 年に提唱され、現在では標準的な宇宙モデルとされているビッグバン宇宙モデルは、ハッブルの法則、宇宙初期の軽元素合成、および宇宙背景輻射の存在により揺るぎないものとなっている。Olbers のパラドックスについても解決がなされるため、銀河などの天体の分布がフラクタル分布である必然性はな

い。むしろ、銀河分布が非常に大スケールにわたってフラクタル分布であるとすると、ビッグバン宇宙モデルでの標準的なシナリオの仮定である、「宇宙は一様等方である」という仮定と矛盾する事になる。

ところが銀河分布の観測から、銀河分布に偏りがあるのではないかと考えられる様になった。この際に用いられた統計量として、空間二点相関関数は以下の様に定義される。微小領域 dV_1, dV_2 が距離 r だけ離れている時に、双方に銀河が見出される確率を

$$dP = n(1 + \xi(r))dV_1dV_2, \quad (7)$$

と表す。 n は銀河の平均個数密度である。平均分布からのずれ $\xi(r)$ を空間二点相関関数と定義する。もし銀河が全くランダムに分布していると、 $\xi = 0$ となる。 Totsuji and Kihara^[9] が銀河分布の解析を試みた当時、銀河分布は天球上の二次元のものしか得られなかった。そこで彼らは銀河の集団である銀河団内では、銀河分布は中心からの距離に対してガウス分布をしているという仮定を用いたところ、空間二点相関関数が距離の冪に従う事が分かった。同様の解析は Peebles^[10] によってもなされ、やはり空間二点相関関数が距離の冪に従う事が示された。すなわち、空間二点相関関数が以下の形で記述される。

$$\xi(r) = \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\gamma}. \quad (8)$$

r_0 は相関距離と呼ばれる距離である。近年は銀河分布のサーベイは距離も含めた3次元的なものとなっており、距離に関する情報も得られる。これらの様々なサーベイの結果から空間二点相関関数を求めたところ、やはりある空間スケールで空間二点相関関数が距離の冪に従う事が示されている^{[3]-[7]}。

空間二点相関関数が距離の冪に従う事から、ある空間的スケールでは特徴的な長さを持たない構造が存在する事が示唆される。銀河分布について様々な統計量を求める解析がなされており、マルチフラクタル解析も適用されている^{[11]-[15]}。これらの解析に共通する事は、非常に大規模な空間スケールでは一様に近づく、すなわち $D_q \rightarrow 3$ になるということである。一方で小規模な空間スケールではフラクタル次元が現れる。以上から、銀河分布が織りなす宇宙の大規模構造はマルチフラクタル構造を持つことが示唆されている。

4. 大規模構造のマルチフラクタル解析

本章では、宇宙論的 N 体シミュレーションにより形成される構造に対しマルチフラクタル解析を適用する。シミュレーションで得られる結果に対してマルチフラ

クタル解析を適用する事により、現在に相当する時刻での様々なスケーリング則だけでなく、進化の過程におけるスケーリング則の変化も追う事が出来る。

宇宙論的 N 体シミュレーションに対するマルチフラクタル解析は、最近では the Millennium Simulation^[16] とよばれる $N = 2160^3$ の粒子を用いたシミュレーションに対する、マルチフラクタル解析がなされている^[17]。この論文では一様分布に近づくスケールを $100-120h^{-1}\text{Mpc}$ としている。本論文では現在に相当する時期の構造を解析するのみならず、進化を追う事とする。また、後述する宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件の問題にも触れ、異なる初期条件の与え方をした場合の進化についても解析する。

想定するモデルとして、現在の観測で標準的とされる ΛCDM モデルを考える。すなわち、一様等方で宇宙項が存在し、ダークマターの大部分はコールドダークマターと考えるモデルである。このモデルに対して宇宙論的 N 体シミュレーションを実行し、大規模構造の進化を解析する。

初期条件の設定には、COSMICS コード^[18] を用いる。COSMICS コードは原始密度ゆらぎとして、ガウス分布に従う密度ゆらぎを生成する。COSMICS コードは4つのコードから成り立っている。このうち、GRAFIC コードは与えられた宇宙論パラメータに対して自動的に初期条件を設定し、ユーザが設定した密度揺らぎの最大値 δ_{max} を満たす時刻を初期時刻としてデータを出力する。宇宙の晴れ上がり時を初期条件を与える時刻として考えると、数値シミュレーションの誤差により高精度の計算が行えない。そこで宇宙の晴れ上がり時からしばらく経過した後を、宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件を与える時刻としている。

本論文では結果を示す時の時間に対応するパラメータとして、赤方偏移 z を用いる。 z は天体からの光における水素の吸収線スペクトルがドップラー効果によってどれだけずれるかを表す量である。宇宙が膨張しているため、遠方の天体ほど z の値が大きくなる。地球上で観測する遠方の天体から光は、過去に放出された光であるので、 z が大きいということは過去を意味する。現在は $z = 0$ に対応する。宇宙の晴れ上がり時は $z \simeq 10^3$ である。

宇宙の晴れ上がりから宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件を与える時刻までの進化は、Lagrange 的摂動論の線形摂動論である Zel'dovich 近似が長年用いられてきた。ところが近年、Lagrange 的摂動論の2次の摂動を用いて初期条件を生成すると、宇宙論的 N 体シミュレーションの結果として形成された構造の統計量が数パーセントずれるという指摘がなされている。ま

た、3 次の摂動の効果についても調べられている。そこで本論文では、線形摂動 (ZA もしくは 1LPT), 2 次の摂動 (2LPT), 3 次の摂動 (3LPT) のうちの longitudinal mode (渦無しモード) のみを考慮した場合、3 次の摂動で longitudinal mode と transverse mode (発散無しモード) 双方を考慮した場合の 4 パターンについて初期条件を与え、構造の進化を解析する。

我々は WMAP 7-year result^[19] で得られる下記の宇宙論パラメータを用いて、LCDM モデルの初期条件を生成した。

$$\Omega_m = 0.275, \quad (9)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.725, \quad (10)$$

$$H_0 = 70.2 \text{ [km/s/Mpc]}, \quad (11)$$

$$\sigma_8 = 0.816, \quad (12)$$

$$n = 0.968. \quad (13)$$

初期条件の密度揺らぎの最大値は $\delta_{\max} = 0.3$ とした。4 パターンのシミュレーションについて、それぞれの 10 サンプルの初期条件を与えた。この時、初期時刻 (初期の赤方偏移) は $z \simeq 100$ となった。初期密度ゆらぎについては疑似乱数を用いてガウス分布を与えるため、初期の赤方偏移はサンプルごとに一定ではない。

宇宙論的 N 体シミュレーションのアルゴリズムは Gelb and Bertschinger により開発された particle-particle particle-mesh (P^3M) method^[20] を用いた。シミュレーションコードは Bertschinger 作成のものを用いた。宇宙論的 N 体シミュレーションのパラメータは以下の通りである。Box size, Softening length は $z = 0$ の時のものを示している。

$$\text{Number of particles} : N = 512^3,$$

$$\text{Box size} : L = 512h^{-1} \text{ [Mpc]},$$

$$\text{Softening length} : \varepsilon = 50h^{-1} \text{ [kpc]}.$$

h は以下の式で定義される、宇宙論でよく用いられる Hubble パラメータを規格化する際に現れるパラメータである。

$$H_0 = 100h \text{ [km/s/Mpc]}. \quad (14)$$

シミュレーションによる構造の進化の後、マルチフラクタル解析を適用する。空間を区切る小立方体の大きさは、 $1 < l < 50 \text{ } h^{-1} \text{ [Mpc]}$ とする。まず、初期条件を線形摂動で与えた場合の 1 つのサンプルについて、マルチフラクタル解析を適用してみる。図 1 は小立方体の一辺の長さ l とモーメントの関係を示している。大スケール ($30 < l < 50 \text{ } h^{-1} \text{ [Mpc]}$) では構造はほぼ一様

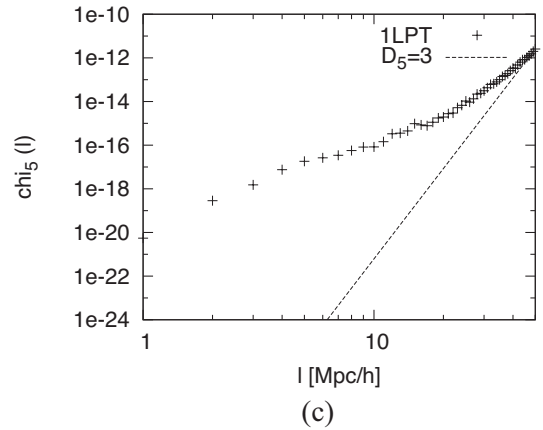
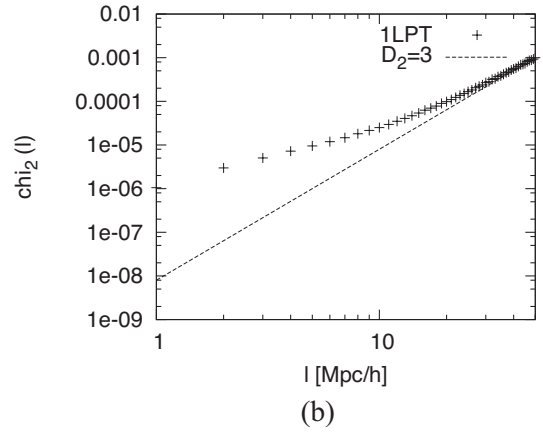
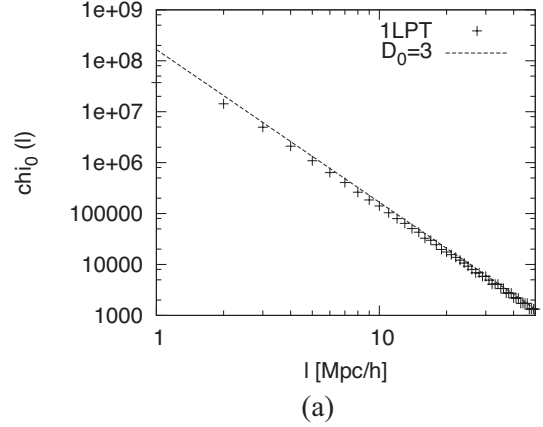


図 1 $z = 0$ でのマルチフラクタル解析。宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件を線形近似で与えた場合の、1 つのサンプルについて解析を行った。(a) $q = 0$, (b) $q = 2$, (c) $q = 5$ 。大スケールでは $D = 3$ の直線に近づき、一様とみなせる。

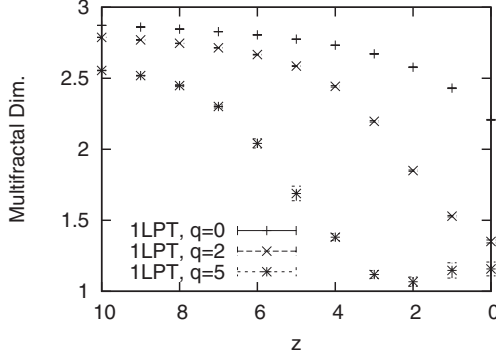


図2 マルチフラクタル次元の進化. ここでは $q = 0, 2, 5$ の場合を示している. 宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件は線形近似で与えている. $q = 0, 2$ の場合には, 次元は単調減少する.

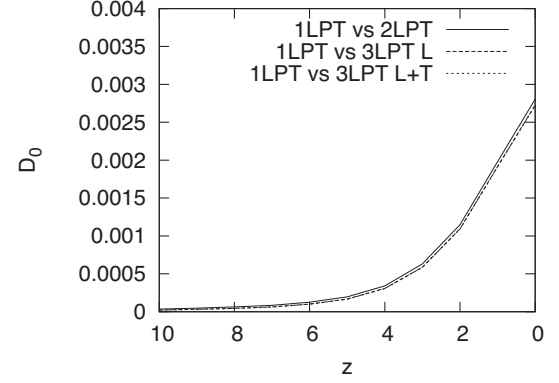
とみなせる一方で, 小スケール ($1 < l < 5 h^{-1} [\text{Mpc}]$) ではマルチフラクタル構造が見られる.

マルチフラクタル次元の進化を図2で示す. 時間発展に伴い, 密度コントラストはますます大きくなり, 大規模構造が形成される. そしてマルチフラクタル次元は一様 ($D = 3$) から徐々に下がって行く. $q = 0, 2$ の場合には, 次元は単調に減少して行く. 一方で $q = 5$ の場合には, 次元は $0 < z < 2$ で増加に転ずる. $D_q = 2$ の場合にはパンケーキ状 (面状) の構造, $D_q = 1$ の場合にはフィラメント状 (線状) の構造が現れている事を示す. 物質分布そのものはパンケーキ状になるが, 高密度領域はフィラメント状になる事を示している.

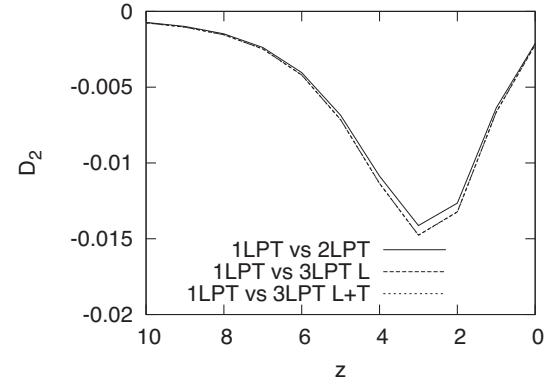
次に, 異なる次数の摂動で初期条件を与えた場合の, 小スケールでのマルチフラクタル次元を求める. 図では3次の摂動の longitudinal mode のみを含めた場合と, longitudinal mode および transverse mode 両方を含めた場合をそれぞれ '3LPT L', '3LPT L+T' と表している. $q = 0$ の場合は, 次元の差は0.01以下であった (図3).

q の値を大きくしていくと, 初期条件に高次の摂動を与えた効果が現れてくる. 同様のシミュレーションを用いた過去の論文^[23]では, パワースペクトルと密度揺らぎの非ガウス性において, 2次の摂動までを含める必要があると結論づけている. そして, 3次の摂動の効果は0.1%のオーダーであるという事が示されている. マルチフラクタル次元については, 初期条件に2次の摂動を含めるかどうかで, 0.1に近い差が現れる. 0.001のオーダーのフラクタル次元のずれが必要であるならば, 3次の摂動を初期条件に含める必要がある. パワースペクトルと密度揺らぎの場合と同様, 3次の摂動において transverse mode の効果は非常に小さい.

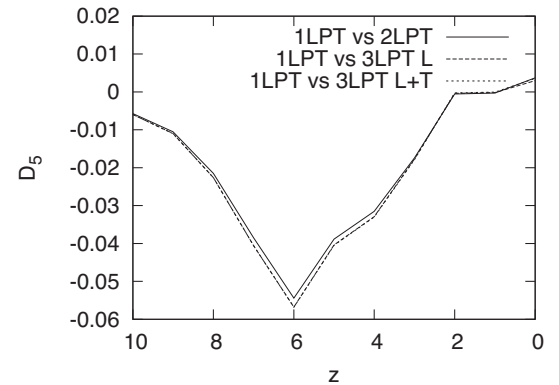
本研究の結果, マルチフラクタル次元は q が小さい



(a)



(b)



(c)

図3 異なる初期条件を与えた場合の, マルチフラクタル次元の違い. (a) $q = 0$, (b) $q = 2$, (c) $q = 5$. q を大きくすると違いが現れてくる.

場合には進化によって単調減少するが、高密度領域を強調する大きな q を選んだ場合には、マルチフラクタル次元は減少から増加に転じる。

5. 結言

宇宙の大規模構造を解析する手段として、本論文ではマルチフラクタル解析に注目した。二点相関関数がある長さスケールでは冪的になる事から、スケーリング則が成り立つと考えられる。宇宙論的 N 体シミュレーションを用いて構造の進化を追い、それに伴ってマルチフラクタル次元がどのように変化していくかを調べた。また、宇宙論的 N 体シミュレーションの初期条件をどのように与えるべきかという初期値問題についても考え、初期条件を与える際に用いる摂動の次数を変える事による影響も調べた。

宇宙論的 N 体シミュレーションは、大スケールでは周期的境界条件を与えるため、大スケールの解析には限度が存在する。一方で物質分布を粒子で離散化して与えるため、小スケールでも与えた粒子の平均間隔などによる限度が存在する。本研究のマルチフラクタル解析では、どの程度の大スケールで分布が一樣とみなせるようになるかを調べる事が重要である。解析の結果、 $30 - 50h^{-1}\text{Mpc}$ 付近で一樣分布に移行する事が分かった。宇宙論的 N 体シミュレーションは $512h^{-1}\text{Mpc}$ をモデル全体のサイズとしているため、一樣分布に移行する長さスケールはモデル全体のスケールに比べて十分小さく、大スケールの限度の問題は影響しないと考えられる。

マルチフラクタル解析はパワースペクトルの解析と異なり、多数のシミュレーションによるアンサンブル平均をとらなくても、一つのサンプルの解析でマルチフラクタル次元が小さな誤差で決まるという長所がある。パワースペクトルの解析ではサンプル間のばらつきが大きく、アンサンブル平均をとらないと有為な情報を引き出せないため、大きな利点となると考えられる。一方で得られたマルチフラクタル次元の物理的な意味を考える必要がある。

本論文では一般相対性理論に基づく宇宙モデルを考え、物質は圧力を及ぼさないコールドダークマターを仮定し、ダークエネルギーは宇宙項とした。宇宙項がダークエネルギーだとした場合には、極めて高精度の微調整が必要になるなど様々な問題が指摘されている^[24]ことから、宇宙項以外でかつ観測を説明出来る様々なモデルが提唱されている^[25]。これらのモデルが妥当かどうかを検証する際には、現在の観測と理論からの予言が誤差の範囲内で一致するかどうかで調べられてい

る。将来は遠方の銀河サーベイ計画が遂行され、この結果から過去の大規模構造が明らかになる。理論的予言は現在の観測を説明できるだけでなく、構造の進化も説明出来る様にならなくてはならない。構造の進化を検証する際の手法として、マルチフラクタル解析は有用な方法の一つになると期待出来る。

謝辞

本研究に基づく一連の研究について、早稲田大学の水野俊太郎博士から多くの有用な意見を頂いた。宇宙の大規模構造に関する諸問題については、2014年6月に開催されたシンポジウム IAU Symposium 308 (The Zeldovich Universe - Genesis and Growth of the Cosmic Web) (Tallinn, Estonia) での講演および議論が大いに参考になった。シンポジウムでの数多くの参加者、およびシンポジウム参加中に業務を滞りなく遂行した総合情報基盤センターのスタッフに、感謝の意を表す。

参考文献

- [1] B. B. Mandelblat 著, 広中平祐 監訳: フラクタル幾何学 (日経サイエンス, 1985).
- [2] C. V. L. Charlier: *Archiv. für Mat. Astron. Fys.*, **4**, 1 (1908).
- [3] M. J. Geller and J. P. Huchra: *Science*, **246**, 897 (1989).
- [4] Y. P. Jing, H. J. Mo, and G. Börner: *Astrophys. J.*, **494**, 1 (1998).
- [5] L. Guzzo *et al.*: *Astron. Astrophys.*, **355**, 1 (2000).
- [6] E. Hawkins *et al.*: *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **346**, 78 (2003).
- [7] I. Zehavi *et al.*: *Astrophys. J.*, **630**, 16 (2005).
- [8] K. Falconer: *Fractal Geometry* (John Wiley & Sons, Chichester, 1990).
- [9] H. Totsuji and T. Kihara: *Pub. Astron. Soc. Japan*, **21**, 221 (1969).
- [10] P. J. E. Peebles: *Astron. Astrophys.*, **32**, 197 (1974).
- [11] T. Kurokawa, M. Morikawa, H. Mouri: *Astron. Astrophys.*, **344**, 1 (1999).
- [12] T. Kurokawa, M. Morikawa, H. Mouri: *Astron. Astrophys.*, **370**, 358 (2001).

- [13] B. J. T. Jones, V. K. Martinez, E. Saar, V. Trimble: Rev. Mod. Phys., 76, 1211 (2005).
- [14] P. Sarkar, J. Yadav, B. Pandey, S. Bharadwaj: Mon. Not. R. Astron. Soc., 399, L128 (2009).
- [15] M. I. Scrimgeour *et al.*: Mon. Not. R. Astron. Soc., 425, 116 (2012).
- [16] V. Springel *et al.*: Nature, 435, 629 (2005).
- [17] C. A. Chacón-Cardona and R. A. Casas-Miranda: Mon. Not. R. Astron. Soc., 427, 2613 (2012).
- [18] C. P. Ma and E. Bertschinger: Astrophys. J., 455, 7 (1995).
- [19] E. Komatsu *et al.*: Astrophys. J. Supp., 192, 18 (2011).
- [20] W. R. Hockney and W. Eastwood: Computer Simulation Using Particles, McGraw-Hill (1981);
E. Bertschinger and J. M. Gelb: Computers in Physics, 5 (2), 164 (1991).
- [21] M. Crocce, S. Pueblas, R. Scoccimarro: Mon. Not. R. Astron. Soc., 373, 369 (2006).
- [22] T. Tatekawa and S. Mizuno: J. Comp. Astropart. Phys., 12, 014 (2007).
- [23] T. Tatekawa: J. Comp. Astropart. Phys., 04, 025 (2014).
- [24] S. Weinberg: Rev. Mod. Phys., 61, 1 (1989).
- [25] E. J. Copelang, M. Sami, S. Tsujikawa: Int. J. Mod. Phys. D, 15, 1753 (2006).